Заняття №2

(перший семестр)

Ймовірносний простір

Ймовірнісний простір – це $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, де:

- Ω – простір елементарних подій,
- $\mathscr{F}$ – сигма-алгебра подій, – система підмножин з Ω таких, що:
    1. $\Omega \in \mathscr{F}$;
    2. $A \in \mathscr{F} \;\Rightarrow\; \overline{A} \equiv \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$;
    3. $A_1, \ldots, A_n$ такі, що $A_k \in \mathscr{F}$ $(1 \le k \le n,\ n \le \infty) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$.
- $P(\cdot)$ – імовірносна міра (ймовірність) – функція множин, для якої областю визначення є сигма-алгебра $\mathscr{F}$ і областю значень відрізок $[0,1]$, тобто:

  а) невід'ємна: $\forall A \in \mathscr{F} \quad P(A) \ge 0$;

  б) сигма-адитивна: $\forall\ A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F} \quad P\left(\bigcup_{k \ge 1} A_k\right) = \sum_{k \ge 1} P(A)$, якщо $A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i \ne j)$;

  в) нормована: $P(\Omega) = 1$.

Подія – це така підмножина з Ω, яка є елементом $\mathscr{F}$.

Події називаються несумісними, якщо їх перетин дорівнює порожній множині.

Якщо елементарні наслідки не є рівноможливими, тоді формула ймовірності є такою:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Аудиторна робота № 2

Задача 2.1 Підкидають гральний кубик; x – число, що випало. Описати простір елементарних подій Ω, вказати склад підмножин, що відповідають подіям

A = {x ділиться на 3}, B = {x – непарне}, C = {$x > 3$},

D = {$x < 7$}, E = {x – дробове число}, F = {$0{,}5 < x < 1{,}5$}.

Виявити пари сумісних подій (тобто таких, що можуть відбутися одночасно).

Задача 2.2 Гральний кубик підкидають двічі.

A = {обидва рази випало число, кратне трьом},

B = {ні разу не випало 6},

C = {обидва рази випало більше, ніж 3},

D = {випала однакова кількість очок}.

Описати множину елементарних подій Ω, та події A, B, C та D як підмножини з Ω.

Задача 2.3 Монету підкидають двічі. Описати множину елементарних подій Ω і події A={був хоч один герб}, B={другим випав герб}. Знайти P(A) та P(B).

Задача 2.4 $|\Omega| = N$, $A \subseteq \Omega$, $|A| = n$. Знайти $P(\omega)$ та $P(A)$, якщо всі ω рівноможливі.

Задача 2.5 Підкидають монету, а потім ще й гральний кубик. Описати множину елементарних подій Ω та знайти P(на монеті герб, а на кубику не менше, ніж 4).

Задача 2.6 Монету підкидають, доки не випаде герб. Описати множину елементарних подій Ω.

Задача 2.7 Підкидають монету до тих пір, доки двічі підряд не випаде герб. Описати множину елементарних подій Ω. Знайти P(монету підкидали 5 раз).

Задача 2.8 Вимірюють дві величини з [0,1]. Описати множину елементарних подій Ω.

Задача 2.9 Підкидають гральний кубик такий, що ймовірність появи кожної грані пропорційна її номеру. Описати множину елементарних подій Ω. Знайти імовірності всіх елементарних подій та P(випало число, що ділиться на 3).

Задача 2.10 З колоди у 52 карти витягають навмання відразу 3 карти. Описати множину елементарних подій Ω. Знайти ймовірність події A=(витягнуті карти будуть 3, 7 та туз).

Задача 2.11 Довести, що відносна частота є імовірнісною мірою.

Задача 2.12 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ – дискретний злічений простір, $\mathscr{F} = B_\Omega$ – булеан (сукупність всіх підмножин), і кожному $\omega_i \in \Omega$ ставимо у відповідність число $0 \le P(\omega_i) \le 1$ таке, що $\sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1$, а для кожної події $A \in B_\Omega$ покладемо $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$. Довести, що P – ймовірність.

Домашнє завдання № 2

1. В номері 2.7 знайти ймовірність того, що буде зроблено 6 підкидань.
2. Яка ймовірність того, що з літер А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К, викладених навмання, вийде слово МАТЕМАТИКА ?

3. Кидають n гральних кубиків. Яка ймовірність того, що в сумі випаде а) n; б) $n+1$?