Заняття №3

(перший семестр)

Умовна ймовірність.
Формула Байєса, формула повної імовірності.
Приклади розв'язку ОЗТІ

Умовна ймовірність: $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ (визначена при $P(B) \neq 0$).

Умовна ймовірність – це теж ймовірність, тобто має всі властивості звичайної ймовірності (невід'ємність, сігмаадитивність та нормованість).

Події *A* та *B* називаються **незалежними**, якщо $P(A \mid B) = P(A)$ і $P(B \mid A) = P(B)$, що, враховуючи визначення умовної імовірності при умові $P(A)P(B) \neq 0$ еквівалентне тому, що $P(AB) = P(A)P(B)$. Останню рівність інколи теж покладають в основу визначення незалежності двох подій.

Формула Байєса: $\boxed{P(B \mid A) = \dfrac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}}$ при $P(A)P(B) \neq 0$.

Формула повної імовірності: $\boxed{P(A) = \sum_j P(A \mid H_j)P(H_j)}$, де $\{H_j\}$ – повна група подій (**ПГП**), тобто:

1. $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$
2. $\bigcup_j H_j = \Omega$ АБО $\sum_j P(H_j) = 1$ («майже ПГП»).

ОЗТІ – основна задача теорії імовірностей – це визначення ймовірностей одних подій на основі ймовірностей інших подій за зв'язками між ними. Ці зв'язки можуть виражатись через:

а) операції (заперечення, сума, різниця, добуток),

б) через умовну ймовірність (def, формула Байєса),

в) через незалежність (def).

Відзначимо, що якщо в формулі Байєса покласти $B = H_i$, а $P(A)$ із знаменника розписати за ФПЙ, то матимемо **розширений варіант формули Байєса**:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{\sum_j P(A \mid H_j)P(H_j)}$$

Аудиторна робота № 3

Задача 3.1 Із урни, в якій 3 білих та 7 чорних куль, послідовно без повернення дістають дві кулі. Розглянемо такі події: $A = \{$першою дістали білу кулю$\}$, $B = \{$другою дістали білу кулю$\}$ та $C = \{$хоч одна з двох куль була білою$\}$. Знайти наступні ймовірності: $P(A \mid B)$, $P(B \mid A)$ та $P(A \mid C)$.

Задача 3.2 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Чи сумісні події *A* та *B*?

Задача 3.3 $A \cap B = \varnothing$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Чи залежні *A* та *B*?

Задача 3.4 *A* та *B* незалежні події з додатними ймовірностями. Чи сумісні події *A* та *B*?

Задача 3.5 Комп’ютер Pentium-I працює два роки без ремонту з ймовірністю 0,7; Pentium-II працює два роки без ремонту з ймовірністю 0,8, а Pentium-III працює два роки без ремонту з ймовірністю 0,9. В призовому фонді оргкомітету з проведення змагань з гри “Quake-III” було 2 комп’ютери Pentium-I, 3 комп’ютери Pentium-II та 5 комп’ютерів Pentium-III. Яка ймовірність того, що комп’ютер, який дістанеться одному з переможців, пропрацює 2 роки без поломок?

Задача 3.6 (продовження задачі 3.5) Комп’ютер одного з призерів таки пропрацював 2 роки без поломок. Яка ймовірність того, що це був саме комп’ютер Pentium-I ?

Задача 3.7 В групі 20 дівчат і 10 хлопців. Домашнє завдання з теорії ймовірностей не зробили 3 хлопці та 4 дівчини (як не соромно!). Знайти ймовірності таких подій: а) студент, якого викличуть до дошки, буде неготовий; б) відповідав хлопець, якщо відомо, що він був неготовий.

Задача 3.8 5% чоловіків та 0,25% жінок – дальтоніки. Навмання обрана людина виявилась дальтоніком. Яка ймовірність того, що це був чоловік, якщо вважати, що чоловіків та жінок однакова кількість?

Задача 3.9 Тільки один з N ключів підходить до замка. Яка ймовірність того, що буде перебрано саме К ключів до того, як буде знайдено потрібний ключ?

Задача 3.10 Студент може доїхати до факультету кібернетики від станції метро "Либідська" або автобусом, який ходить кожні 20 хвилин, або тролейбусом, який ходить кожні 10 хвилин. Яка ймовірність того, що студент буде чекати на зупинці не більше ніж 5 хвилин?

Задача 3.11 Події A, B та C незалежні в сукупності. Довести, що а) $A \cap B$ та C незалежні; б) $A \cup B$ та C незалежні.

Задача 3.12 Ймовірність попасти в мішені А, В та С для лучника складають відповідно 0,5 , 0,6 та 0,7. Яка ймовірність що, стріляючи по кожній мішені 1 раз (всього 3 постріли), лучник хоч раз попаде?

Домашнє завдання № 3

1. Події А та В незалежні. Чи будуть вони сумісними? Навести приклад.
2. Із колоди в 36 карт навмання витягають одну карту. Розглянемо події А={витягнута карта туз}, В={витягнута карта чорної масті} та С={витягнута карта є картинкою (тобто це або валет, або дама, або король, або туз)}. Які з пар подій (А та В, В та С, А та С) залежні, а які – ні? Чому?
3. Стрілець цілить у мішень, яка рухається на нього. Ймовірність поцілити при першому пострілі складає 0,4 , при другому – 0,5, а при третьому – 0,6 (чим ближче мішень, тим легше в неї влучити). Яка ймовірність, що буде саме 2 влучення при трьох пострілах?
4. Навести приклад того, що з попарної незалежності трьох подій не випливає їх незалежність в сукупності.

<u>**Додаткові задачі**</u>

(простенькі)

1. Петрик (3 роки, зріст 80 см, худорлявої статури, білявий, ходить до дитсадка “Сонечко”, дуже полюбляє математику і вже вміє лічити до 10.351) і Маринка (4 роки, зріст 86 см, худорлявої статури, чорнява, ходить до дитсадка “Сонечко”, дуже полюбляє математику і вже вміє лічити до 30π) кожен на своїй картці пишуть довільне натуральне число від 1 до N. Потім Маринка показує Петрику своє число, а Петрик каже, чи більше його число за Марійчине чи ні. Після цього Маринка має вгадати, яке число написав Петрик. Яке число найдоцільніше писати Марійці на своїй картці (“не навмання”), щоб частіше вигравати?
2. Яка ймовірність того, що обране Петриком (3 роки, зріст 80 см, худорлявої статури, білявий, ходить до дитсадка “Сонечко”, дуже полюбляє математику і вже навчився лічити до 23.123) навмання тризначне число виявиться більшим, ніж обране навмання та помножене на 10 двозначне число Марійки (4 роки, зріст 86 см, худорлявої статури, чорнява, ходить до дитсадка “Сонечко”, дуже полюбляє математику і вже вміє лічити до 33π)?

   До речі, моделювання цієї задачі в MathCAd2001Pro виглядає так:

$$p := \left| \begin{array}{l} N \leftarrow 1000000 \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad s \leftarrow s + 1 \ \text{ if } \operatorname{trunc}(100 + \operatorname{rnd}(900)) > \operatorname{trunc}(10 + \operatorname{rnd}(90))\cdot 10 \\ \dfrac{s}{N} \end{array} \right.$$

$$p = 0.504552$$

   де N – кількість проведених розіграшів (чим більше N, тим ближчим буде отримана статистична частота до шуканої ймовірності), p – знайдена статистична частота (три знаки після коми у неї такі ж, як і у шуканої ймовірності).

3. В Петриковій книзі 200 сторінок, а у Маринчиній – 100. Яка ймовірність того, що номер сторінки, на якій Петрик навмання відкриє свою книгу, буде більшим ніж номер сторінки, на якій Марійка навмання відкриє свою книгу?

<u>Задачі підвищеної складності</u>

1. Будинок має n поверхів. Кожен поверх може бути пофарбованим чи не пофарбованим. Скількома способами можна розфарбувати будинок, якщо не дозволяється, щоб довільні два сусідні поверхи були пофарбованими?
2. Монету підкидають, доки двічі підряд не випаде герб. Знайти ймовірність того, що монету підкидатимуть n раз ($n \geq 4$).
3. Дев'ять людей хочуть мати спільні гроші в сейфі, а сейф має бути таким, щоб можна було його відкрити, якщо зберуться принаймні шестеро з цих дев'яти людей, а інакше щоб цей сейф неможливо було відкрити. Скільки ключів і скільки замків має бути від цього сейфа?
4. Нехай n адресованих листів навмання розкладаються в n підписаних конвертів. Яка ймовірність того, що хоч один лист потрапить у призначений для нього конверт? Знайти також граничне значення цієї ймовірності при $n \to \infty$. Для розв'язування цієї задачі можна використати загальний вид теореми суми:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<m} P(A_i \cap A_j \cap A_m) - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \qquad (\heartsuit)$$

5. Петро кожного разу ввечері кладе документи навмання в одну з восьми шухляд, а в двох випадках із десяти взагалі їх губить. Вранці, відкривши першу шухляду, і не побачивши там документів, Петро задумався, яка ймовірність того, що документи в одній з решти семи шухляд, і як ймовірність на успіх зменшуватиметься по мірі відкривання шухляд? А як змінюватиметься при цьому ймовірність того, що документи у наступній шухлядці?