Заняття №4

(перший семестр)

Схема незалежних випробувань Бернуллі.
Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа

Якщо $P(A) = p \in (0,1)$ то ймовірність того, що подія A в n незалежних дослідах (спостереженнях) відбудеться саме m раз, складе

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}},$$

тобто, якщо $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_n\}$, де ω_m = {в n незалежних дослідах подія A відбулась m раз}, то $P\{\omega_m\} = P_n(m)$ і визначається за вищенаведеною формулою. Легко бачити, що $\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = (p+q)^n = 1$ за біномом Ньютона, де $q = 1 - p$.

Відзначимо, що найбільшого значення $P_n(m)$ досягає для того (чи тих) m_0, для якого виконується нерівність

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

<u>Локальна теорема Муавра–Лапласа</u> Якщо $n \to \infty$, $m \to \infty$, а величина $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ залишається обмеженою, то

$$\boxed{P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)},$$

де $q = 1 - p$.

<u>Інтегральна теорема Муавра–Лапласа</u> Якщо $n \to \infty$, $m \to \infty$, а величина $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ залишається обмеженою, то

$$\boxed{P\{a \le x < b\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx}$$

рівномірно по a та по b, причому інтеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_a^b \varphi(x)dx$ представляють у вигляді $\int_a^b \varphi(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – так звана функція Лапласа (її значення табульовані).

N.B. Рівномірність означає, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall\ n \geq N\ \forall\ a, b$ $\left| P\{a \leq x < b\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx \right| \leq \varepsilon$

($-\infty \leq a \leq b \leq \infty$).

Теорема Пуассона Якщо $0 < a < b < \infty$, $a_n = np$ і при $n \to \infty$ $p \to 0$ (тобто p близьке до 0) й $a < a_n < b$ то

$$\boxed{P_n(m) \sim \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n}}$$

(теорему Пуассона застосовують замість ЛТМЛ саме при малих p).

Аудиторна робота № 4

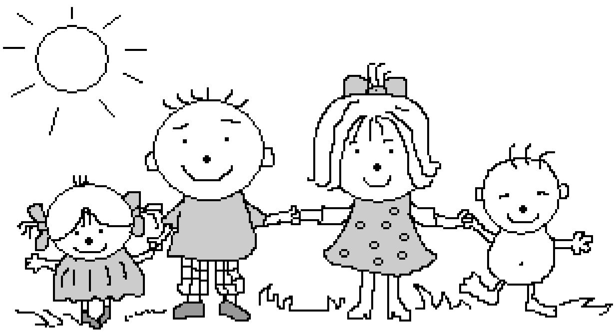
Задача 4.1 Монету підкидають 5 раз. Яка ймовірність того, що герб з'явиться лише 1 раз?

Задача 4.2 Знайти ймовірності всіх можливих появ герба при 5 підкиданнях монети. Зобразити результати графічно.

Задача 4.3

а) Вважаючи, що народження хлопчика і дівчинки рівноможливі, визначити, яку частку сімей з 6 дітьми складають сім'ї з 3 хлопчиків та 3 дівчаток.

б) Нехай маємо 10 сімей, в кожній з яких 6 дітей. Яка ймовірність того, що в 4 із цих сімей буде 3 хлопчики та 3 дівчинки?



в) Скільки сімей з 6 дітьми треба відвідати, щоб з ймовірністю не меншою за 0,8 налічити саме 2 сім'ї (не більше і не менше), в яких є 3 хлопчики і 3 дівчинки?

г) Скільки сімей з 6 дітьми треба відвідати, щоб з ймовірністю не меншою за 0,8 налічити хоча б 2 сім'ї, в яких є 3 хлопчики і 3 дівчинки?

Задача 4.4 При роздачі колоди у 52 карти чотирьом гравцям один з них 3 рази підряд не отримав жодного туза. Чи слушно йому жалітися на невезіння?

Задача 4.5 В лотереї 5 квитків, серед яких 1 виграшний. а) Яка ймовірність виграти 1 раз за 5 участей в таких лотереях? б) Яка ймовірність виграти хоч раз за 5 участей в таких лотереях?

Задача 4.6 Телефонна станція обслуговує N абонентів, які користуються телефоном однаково часто і на протязі години роблять в середньому n дзвінків довжини C хвилин ($C<60$). Яка ймовірність того, що в конкретний момент рівно m абонентів будуть розмовляти?

Задача 4.7 В сім'ї 10 дітей. Яка ймовірність того, що хлопчиків від 3 до 8?

Задача 4.8 Автомат випускає гвіздки, причому ймовірність появи бракованого гвіздка складає 0,1%. Яка ймовірність того, що серед 1000 гвіздків буде не більше двох бракованих?

Задача 4.9 Шульги (лівши) складають 1% людей. Яка ймовірність того, що серед 200 людей а) буде саме 4 шульги, б) знайдеться 4 шульги ?

Задача 4.10 Знайти ймовірність того, що в послідовності дослідів Бернуллі (з ймовірністю успіху **p**) ***a*** успіхів зустрінуться раніше, ніж ***b*** невдач.

Домашнє завдання № 4

1. Гральний кубик підкидають 5 раз. Яка ймовірність того, що 2 рази з'явиться число очок, кратне 3?
2. Скільки треба взяти випадкових цифр, щоб ймовірність появи серед них цифри 5 була не менше від 0,9?
3. Ймовірність влучити в ціль 0,35. Робиться 10 пострілів. Знайти найімовірнішу кількість влучень і ймовірність цієї кількості влучень.
4. Монету кидають на поверхню стола, розділеного на однодюймові квадрати. Діаметр монети ¾ дюйма. Яка ймовірність того, що монета повністю попаде всередину деякого квадрата?

Додаткові задачі

1. Коли ліфт спускається з 10-го поверху на 1-ий, ймовірність того, що його "перехоплять", складає 0,9. Яка ймовірність того, що ліфт буде перехоплено, коли він буде так саме спускатися з а) 11-го б) 12-го поверху?

Задачі підвищеної складності

1. (You're in the army now…) Маємо армію, в якій 7 полків, в кожному з яких 6 батальйонів, в кожному з яких 5 рот, в кожній з яких 4 взводи, в кожному з яких 3 відділення, в кожному з яких 15 солдат. В цій армії кожен другий солдат може скласти залік з військової підготовки (тобто ймовірність того, що деякий солдат цієї армії складе залік, складає 0,5). Рівень відділення вважається задовільним, якщо в цьому відділенні хоча б 12 солдат складають залік. Рівень взводу вважається задовільним, якщо в ньому хоча б 2 відділення мають задовільний рівень. Рівень роти вважається задовільним, якщо в ній хоча б 3 взводи мають задовільний рівень. Рівень батальйону вважається задовільним, якщо в ньому хоча б 4 роти мають задовільний рівень. Рівень полку вважається задовільним, якщо в ньому хоча б 4 батальйони мають задовільний рівень. Рівень армії вважається задовільним, якщо в ній хоча б 5 полків мають задовільний рівень.

   а) Яка ймовірність того, що зараз рівень цієї армії є задовільним?

   б) Яка ймовірність того, що у навмання обраному полку (батальйоні, роті, взводі, відділенні) рівень виявиться задовільним?

   в) До якого рівня треба підвищити ймовірність солдата скласти залік, щоб ймовірність цієї армії бути на задовільному рівні склала хоча б 0,5 (відповідь дати з точністю до 10^{-3}).

   г) При якій найменшій кількості солдат, здатних скласти залік, у цієї армії є хоч найменший шанс бути на задовільному рівні?
2. В схемі незалежних випробувань Бернуллі проводиться n дослідів з ймовірністю успіху в одному досліді p. Знайти найімовірнішу кількість успіхів.
3. Скільки дослідів в схемі незалежних випробувань Бернуллі (з ймовірністю успіху в одному досліді p) слід провести, щоб ймовірність появи саме m успіхів була найбільшою?