

## Заняття №8

(перший семестр)

### Неперервні випадкові величини.

#### Щільність, математичне сподівання, дисперсія, мода, медіана

Випадкова величина  $\xi$  (як вимірне відображення  $\Omega \rightarrow R$ ) є неперервною, якщо  $\Omega$  – власна підмножина з  $R$  (тобто  $\Omega$  „більш ніж злічена”, наприклад, відрізок, інтервал і т.д.).

Ще одне з можливих визначень:  $\xi$  – неперервна випадкова величина, якщо  $\exists f_\xi(x) \geq 0$  інтегрована (за Ріманом на  $R$ ), яка називається щільністю і є такою, що

$$F_\xi(x) \equiv P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt.$$

**Властивості щільності:**

1.  $f_\xi(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$  (за def);
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 1$  (бо це є  $F_\xi(+\infty) \equiv 1$ );
3.  $f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x)$  в усіх точках неперервності функції  $f_\xi(x)$ .

**N.B.1:**  $P\{\xi = x_0\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F_\xi(x_0 + \Delta x) - F_\xi(x_0)) = 0 \quad \forall x \in R$ , тобто ймовірність попасти в конкретну точку рівна 0.

**N.B.2:**  $P\{\xi \in (a, b)\} = \int_a^b f_\xi(x) dx$ .

**Математичне сподівання**  $m = M\xi = E\xi = \int_R x f_\xi(x) dx$  (для дискретної випадкової величини її математичне сподівання  $m = \sum_k x_k p_k$ ).

**Дисперсія**  $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_R (x - m)^2 f_\xi(x) dx = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_R x^2 f_\xi(x) dx - \left( \int_R x f_\xi(x) dx \right)^2$ .

**Мода**  $x_0$ :  $\arg \max_t P\{\xi = t\}$  для дискретної в.в.,  
 $\arg \max_t f_\xi(t)$  для неперервної в.в.

**Медіана**  $h$ :  $P\{\xi < h\} = P\{\xi \geq h\}$ , тобто  $h$  – це корінь рівняння  $F_\xi(x) = \frac{1}{2}$ .

## Аудиторна робота № 8

**Задача 8.1** Випадкова величина  $X$  має щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \cos(x), & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Знайти  $c$ ,  $P\left\{|X| < \frac{\pi}{4}\right\}$ ,  $MX$  та  $DX$ .

**Задача 8.2** Випадкова величина  $X$  має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти  $P\{X \geq 1\}$ ,  $MX$ , медіану  $h$  та дисперсію  $DX$ .

**Задача 8.3** Випадкова величина  $X$  рівномірно розподілена на відрізку  $[a, b]$ , тобто її щільність

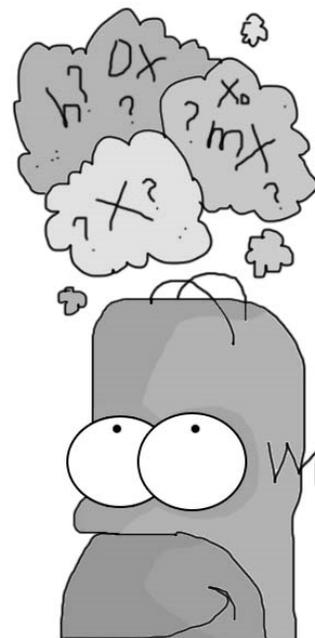
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases}$$

Знайти  $MX$ , медіану  $h$  та дисперсію  $DX$ .

**Задача 8.4** Випадкова величина  $X$  розподілена за законом Сімпсона, тобто її щільність є ненульовою лише на  $[-a, a]$ , де має вид ламаної, що проходить через точки

$$(-a, 0), \quad (0, 1/a) \quad \text{та} \quad (a, 0).$$

Записати аналітично щільність розподілу та функцію розподілу випадкової величини  $X$ , знайти  $MX$ , медіану  $h$ , моду  $x_0$  та дисперсію  $DX$ .



**Задача 8.5** Випадкова величина  $X$  має розподіл Коші, тобто її щільність

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

де  $a > 0$ . Чи існує  $MX$  ?

**Задача 8.6** Випадкова величина  $X$  розподілена за законом арксинуса, тобто її щільність

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a \end{cases}$$

Знайти  $F(x)$ ,  $MX$  та  $DX$ .

### Домашнє завдання № 8

1. Випадкова величина  $X$  має гауссівський (нормальний) розподіл, тобто

$$f(x) = \frac{1}{c\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Знайти  $c$ ,  $MX$ ,  $DX$  та побудувати схему графіка функції  $f(x)$ .

2. Випадкова величина  $X$  має показниковий (експоненційний) розподіл, тобто

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

для деякого  $\lambda > 0$ . Знайти  $MX$ ,  $DX$  та побудувати схему графіка функції  $f(x)$ .

### Додаткова задача

Нехай  $x \sim N(m, \sigma^2)$ ,  $d \in \{0, 1\}$ ,  $P\{d = 0\} = 1 - p$ ,  $P\{d = 1\} = p \in (0, 1)$ ,  $y = xd$ . Знайти функцію розподілу випадкової величини  $y$  та побудувати схему її графіка.