

Заняття №13

(перший семестр)

Двовимірні випадкові вектори

Якщо дві дискретні випадкові величин ξ та η задані на спільному просторі елементарних подій Ω , то пара (ξ, η) називається двовимірним випадковим дискретним вектором. Розподіл (ξ, η) зручно задавати у вигляді таблиці

$\eta \backslash \xi$	b_1	b_2	...	b_n	Σ
a_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}	p_1
a_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}	p_m
Σ	q_1	q_2	...	q_n	1

де в першому стовпчику – можливі значення випадкової величини ξ , а в першому рядку – можливі значення випадкової величини η , в останньому стовпчику стоять суми по рядках, в останньому рядку – суми по стовпчиках, а $p_{ij} = P\{\xi_1 = a_i, \xi_2 = b_j\}$. Відзначимо, що перший і останній стовпчики утворюють розподіл в.в. ξ_1 , а перший і останній рядки – розподіл в.в. ξ_2 . Розподіл вектора (ξ, η) визначає розподіл обох його компонент, але не навпаки – значення рядка та стовпчика із сумами не визначають (однозначно) “внутрішню” частину таблиці (наприклад, якщо $P\{\xi = \pm 1\} = 1/2$, $P\{\eta = \pm 1\} = 1/2$, то розподіл вектора (ξ, η) у випадку, коли $\xi = \eta$, буде відрізнятися від випадку, коли $\xi = -\eta$).

Відзначимо, що $P\{\eta = b_j | \xi = a_i\} = \frac{p_{ij}}{p_i}$, $P\{\xi = a_i | \eta = b_j\} = \frac{p_{ij}}{q_j}$.

ξ та η незалежні $\Leftrightarrow \forall i, j \ p_{ij} = p_i q_j$.

Аудиторна робота № 13

Задача 13.1 Двовимірна дискретна випадкова величина (ξ, η) задана таблицею розподілу

$\eta \backslash \xi$	3	8	10
-1	0,17	0,13	0,25
0	0,1	0,3	0,05

а) Знайти умовний розподіл ξ при $\eta = -1$.

б) Чи залежні ξ та η ?

Задача 13.2 Двовимірний випадковий вектор (ξ, η) має розподіл

$\eta \backslash \xi$	0	1
-1	0,1	0,2
0	0,2	0,3
1	0	0,2

Знайти $M\zeta$, $D\zeta$, де $\zeta = 2\xi + \eta^2$.

Задача 13.3 Випадкова точка на площині (ξ, η) має розподіл

$\eta \backslash \xi$	0	1
-1	0,1	0,15
0	0,15	0,25
1	0,2	0,15

Знайти $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $\text{cov}(\xi, \eta)$ та $\rho_{\xi, \eta}$.

Задача 13.4 Випадковий вектор (ξ, η) має $M\xi=0$, $M\eta=2$, $D\xi=2$, $D\eta=1$ та коефіцієнт кореляції

$$\rho = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\zeta=2\xi-3\eta$. Знайти $M\zeta$ та $D\zeta$.

Задача 13.5 В продукції заводу браку через дефект А складає 3%, а через дефект В – 4,5%. Небракованої продукції 95%. Знайти коефіцієнт кореляції дефектів А та В.

Домашнє завдання №13

- Із коробки, в якій 3 червоних та 3 зелених олівці, послідовно без повернення витягають олівці до появи першого червоного олівця. Нехай ξ – кількість витягнутих при цьому олівців. Потім продовжують витягати олівці до появи першого зеленого олівця. Нехай η – кількість витягнутих при цьому олівців (в другій серії). Скласти закон розподілу вектора (ξ, η) , знайти його числові характеристики. Чи залежні ξ та η ?

Додаткові задачі

- Використовуючи Excel, знайти всі параметри розподілу випадкового вектора, розподіл якого задано наступною таблицею:

$\eta \backslash \xi$	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	Σ
7	0,001517	0,001558	0,001599	0,00164	0,001681	0,001722	0,001763	0,001804	0,001845	0,001886	0,017015
9	0,001599	0,00164	0,001681	0,001722	0,001763	0,001804	0,001845	0,001886	0,001927	0,001968	0,017835
11	0,001681	0,001722	0,001763	0,001804	0,001845	0,001886	0,001927	0,001968	0,002009	0,00205	0,018655
14	0,001804	0,001845	0,001886	0,001927	0,001968	0,002009	0,00205	0,002091	0,002132	0,002173	0,019885
17	0,001927	0,001968	0,002009	0,00205	0,002091	0,002132	0,002173	0,002214	0,002255	0,002296	0,021115
21	0,002091	0,002132	0,002173	0,002214	0,002255	0,002296	0,002337	0,002378	0,002419	0,00246	0,022755
26	0,002296	0,002337	0,002378	0,002419	0,00246	0,002501	0,002542	0,002583	0,002624	0,002665	0,024805
32	0,002542	0,002583	0,002624	0,002665	0,002706	0,002747	0,002788	0,002829	0,00287	0,002911	0,027265
39	0,002829	0,00287	0,002911	0,002952	0,002993	0,003034	0,003075	0,003116	0,003157	0,003198	0,030135
47	0,003157	0,003198	0,003239	0,00328	0,003321	0,003362	0,003403	0,003444	0,003485	0,003526	0,033415
57	0,003567	0,003608	0,003649	0,00369	0,003731	0,003772	0,003813	0,003854	0,003895	0,003936	0,037515
69	0,004059	0,0041	0,004141	0,004182	0,004223	0,004264	0,004305	0,004346	0,004387	0,004428	0,042435
83	0,004633	0,004674	0,004715	0,004756	0,004797	0,004838	0,004879	0,00492	0,004961	0,005002	0,048175
100	0,00533	0,005371	0,005412	0,005453	0,005494	0,005535	0,005576	0,005617	0,005658	0,005699	0,055146
121	0,006191	0,006232	0,006273	0,006314	0,006355	0,006396	0,006437	0,006478	0,006519	0,00656	0,063756
146	0,007216	0,007257	0,007298	0,007339	0,00738	0,007421	0,007462	0,007503	0,007544	0,007585	0,074006
176	0,008446	0,008487	0,008528	0,008569	0,00861	0,008651	0,008692	0,008733	0,008774	0,008815	0,086306
212	0,009922	0,009963	0,010004	0,010045	0,010086	0,010127	0,010168	0,010209	0,01025	0,010291	0,101066
255	0,011685	0,011726	0,011767	0,011808	0,011849	0,01189	0,011931	0,011972	0,012013	0,012054	0,118696
307	0,013817	0,013858	0,013899	0,01394	0,013981	0,014022	0,014063	0,014104	0,014145	0,014186	0,140016
Σ	0,09631	0,09713	0,09795	0,09877	0,09959	0,10041	0,10123	0,10205	0,10287	0,10369	1

Для завантаження xls-файла змініть у адресі браузера розширення pdf на xls. Головне – зрозуміти, як за допомогою Excel порахувати $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, i , особливо, $\text{cov}(\xi, \eta)$ та $\rho_{\xi\eta}$ за кілька хвилин.