<u>Заняття №14</u>

(перший семестр)

<u>Інтеграл Лебега</u>

Якщо ξ – проста випадкова величина на ймовірносному просторі $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, тобто

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega)$$

де x_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ – значення випадкової величини ξ, а A_k – елементи розбиття простору Ω $\left(\bigcup_k A_k = \Omega,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j\right)$, то математичне сподівання для ξ визначається як

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k P(A_k)$$

Це визначення коректне (не залежить від способу розбиття простору Ω).

Дамо визначення $M\xi$ для довільної випадкової величини ξ. З точки зору аналізу це <u>інтеграл Лебега</u>, який позначається

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} \xi dP.$$

Якщо $\xi(\omega) \geq 0$, то розглядають послідовність невід'ємних простих випадкових величин $\{\xi_n | n \geq 1\} : \xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$ при $n \to \infty$ $\forall \omega \in \Omega$. Оскільки $M\xi_n \leq M\xi_{n+1}$ (бо $\xi_n \leq \xi_{n+1} \forall \omega$), то $\exists \lim_{n\to\infty} M\xi_n \leq \infty$ і тоді визначають

$$M\xi \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} M\xi_n$$

Якщо ξ – довільна, то розглядають $\xi = \xi^+ - \xi^-$, де $\xi^+ = \max(\xi, 0)$, $\xi^- = -\min(\xi, 0)$ ($\xi^+ \geq 0, \xi^- \geq 0$, тобто для ξ^+ та ξ^- мат. сподівання вже визначили) і тоді

$$M\xi = M\xi^{+} - M\xi^{-},$$

якщо хоч одне з $M\xi^{+}$ чи $M\xi^{-}$ скінченне, тобто коли

$$\min\left(M\xi^{+}, M\xi^{-}\right) < \infty .$$

Визначення скінченності мат. сподівання : $M\xi \overset{def}{<} \infty$, якщо $M\xi^{+} < \infty$ та $M\xi^{-} < \infty$.

<u>N.B.</u> Оскільки $|\xi| = \xi^{+} + \xi^{-}$, то $M|\xi| < \infty \Leftrightarrow |M\xi| < \infty$, тобто інтегрованість та абсолютна інтегрованість за Лебегом еквівалентні, що не має місця для інтеграла Рімана.

<u>N.B.</u> Якщо $(\Omega, F) = (R, \mathrm{B}_R)$, а μ - міра Лебега, тобто $\mu((a,b)) = \mu((a,b]) = b - a$, то інтеграл $\int\limits_R \xi(\omega)\mu(d\omega)$ позначають $\int\limits_R \xi(x)dx$ або ще $(L)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi(x)dx$, щоб підкреслити відмінність від <u>інтеграла Рімана</u> $(R)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi(x)dx$ (хоч їх значення і співпадають).

Кажуть, що міра μ породжена функцією $F(x) = x$, бо

$$\mu(a,b) = F(b) - F(a) = b - a ,$$

причому це „породження” міри Лебега приймають і коли μ - ймовірносна міра, тобто, коли $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x, 0 \le x \le 1, \\ 1, x > 1 \end{cases}$ і коли μ – просто міра, тобто, коли $F(x) = x \ \forall x \in R$.

Якщо ж $F(x)$ є <u>узагальненою функцією розподілу</u> (тобто за def це неспадна, неперервна справа, зі значеннями з R^1), то відповідний інтеграл називається інтегралом <u>Лебега-Стілтьєса</u> і позначається

$$(L-S)\int\limits_R \xi(x)F(dx),$$

щоб відрізняти його від відповідного інтеграла <u>Рімана-Стілтьєса</u>

$$(R-S)\int\limits_R \xi(x)F(dx),$$

хоча якщо ($R-S$) існує, то і ($L-S$) існує і вони рівні.

N.B. Аналогічно $R, L, R-S$ і $L-S$ визначаються і в просторі R^n.

N.B. Функція f буде інтегрована за Ріманом на $[a,b]$, якщо вона неперервна за виключенням множини точок лебегової міри нуль; а за Лебегом f буде інтегрованою на $[a,b]$, якщо вона вимірна (і може мати розриви в кожній точці визначення).

Аудиторна робота № 14

Задача 14.1 Довести лінійність інтеграла Лебега, тобто, що

а) $Mc\xi = cM\xi$,

б) $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta$ (якщо $\xi \ge 0$ та $\eta \ge 0$ або $M|\xi| < \infty$ та $M|\eta| < \infty$).

Задача 14.2 Довести сігмаадитивність інтеграла Лебега, тобто, що для розбиття $\{E_k \mid k \ge 1\}$ простору Ω має місце

$$\int_\Omega \xi dP = \sum_{k\ge1} \int_{E_k} \xi dP$$

Задача 14.3 Довести властивість абсолютної неперервності інтеграла Лебега: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall F \subseteq \Omega \ (P(F) < \delta)$

$$\left| \int_F \xi dP \right| < \varepsilon$$

Задача 14.4 Довести, що $Mc = c$ (c – const), використовуючи визначення математичного сподівання саме як інтеграла Лебега.

Задача 14.5 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ – ймовірносний простір, $\xi : (\Omega, \mathscr{F}) \to (E, \varepsilon)$ вимірна функція, P_ξ – міра на ε така, що $\forall A \in \varepsilon \quad P_\xi(A) = P\{\omega \mid \xi(\omega) \in A\} = P\left(\xi^{-1}(A)\right)$. Довести, що $\forall$ ε-вимірної функції $g(x)$, $x \in E$

$$\int_A g(x) P_\xi(dx) = \int_{\xi^{-1}(A)} g(\xi(\omega)) P(d\omega)$$

(тобто, якщо існує один з цих двох інтегралів, то існує і другий і вони рівні).

Задача 14.6 Випадкові величини ξ та η незалежні, $M|\xi| < \infty$, $M|\eta| < \infty$. Довести, що $M|\xi\eta| < \infty$ і $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

<u>**Домашнє завдання № 14**</u>

1. Якщо $\xi \geq 0$ необмежена (але вимірна) функція, то розглядають

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega), & \xi(\omega) \leq n \\ n, & \xi(\omega) > n \end{cases}$$

і покладають

$$\int_E \xi(\omega)\mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_E \xi_n(\omega)\mu(d\omega)$$

За цим визначенням порахувати інтеграл Лебега від необмеженої функції

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

по $[0,1]$ за мірою Лебега μ.

2. Довести, що функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } x - \textit{раціональне число} \\ 0, & \textit{якщо } x - \textit{ірраціональне число} \end{cases}$$

не інтегрована за Ріманом, але інтегрована за Лебегом.

Знайти

$$(L) \quad \int_0^1 f(x)d\mu$$

(μ – міра Лебега).

3. Чи вірно, що $(\xi + \eta)^+ = \xi^+ + \eta^+$?